

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2026.01.03

利用极端质量比旋近系统检验黑洞无毛定理

易长宏¹, 王炳霖^{2,3}, 韩文标^{2,1,3}

(1. 国科大杭州高等研究院 基础物理与数学科学学院, 杭州 310024; 2. 中国科学院 上海天文台, 上海 200030;
3. 中国科学院大学 天文与空间科学学院, 北京 100049)

摘要: 极端质量比旋近 (extreme-mass-ratio inspiral, EMRI) 是未来空间引力波探测器的重要波源, 它能够提供超大质量黑洞周围精确的时空信息, 从而可以对黑洞无毛定理进行严格检验。以往的模拟检验通常都采用了模型依赖的黑洞模型或者使用简化的模拟数据。该文采用参数化的任意轴对称黑洞来计算 EMRI 的引力波波形, 并且使用时间延迟干涉技术仿真空间引力波观测数据, 运用 Fisher 信息矩阵对引力波检验黑洞四极矩偏离能力进行评估, 结果显示, 未来空间引力波探测可以将无毛定理约束至 10^{-4} 数量级。

关键词: 黑洞; 极端质量比旋近; 参数化度规; 无毛定理

中图分类号: P145.8 **文献标识码:** A

1 引言

2015年9月14日, LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) 首次观测到双星并合产生的引力波事件 GW150914^[1,2], 这标志着引力波天文学进入了一个全新的时代。此后, LIGO-Virgo-KAGRA 合作组又陆续确认了数十起引力波事件^[3-6]。地面引力波探测器的有效观测频段为 $10 \sim 10^3$ Hz, 预计在 2030 年前后发射的空间引力波探测器 Laser Interferometer Space Antenna (LISA)^[7-9]、太极^[10,11]、天琴^[12] 等将实现对处于毫赫兹波段的引力波的探测。

空间引力波探测器可观测到的潜在波源, 包括大质量双黑洞 (massive black hole binary, MBHB)^[13] 并合、恒星起源黑洞双星 (stellar original black hole binary, SOBHB)^[14] 的旋近和极端质量比旋近 (extreme-mass-ratio inspiral, EMRI)^[15] 等。本文主要关注 EMRI 系统。EMRI 一般由一个大质量黑洞 (massive black hole, MBH, 质量为 $10^4 M_{\odot} \sim 10^7 M_{\odot}$) 以及一个不断向 MBH 旋入的恒星级质量的致密天体 (stellar compact object, SCO, 质量为 $1 M_{\odot} \sim 10^2 M_{\odot}$) 组成。在一个典型的 EMRI 系统中, 次星与主星的质量比一般在 $10^{-7} \sim 10^{-4}$ 之间。由于 EMRI 系统中双星质量的显著差异, SCO 将缓慢地向 MBH 旋近, SCO 坠入 MBH 的最后一年将持续约 $10^4 \sim 10^5$ 个轨道周期, 在其中大多数周期内 SCO 处于 MBH 视界附近的强引力场内。

收稿日期: 2025-03-20; 修回日期: 2025-12-22

资助项目: 国家重点研发计划 (2021YFC2203002); 国家自然科学基金 (12173071, 12473075)

通讯作者: 韩文标, wbhan@shao.ac.cn

ChinaXiv:202604.00115v1

EMRI 信号中包含了中心大质量黑洞周围时空几何的丰富信息, 因此, 对 EMRI 信号的观测与分析将为天体物理极端环境下的引力物理规律以及黑洞本性等多方面的研究提供全新的途径。一种常见的 EMRI 形成通道为一个 SCO 从核星团 (nuclear star cluster) 被捕获到 MBH 的一个高离心率轨道上^[16-20]。在 LISA 任务期间预计将观测到几个至几千个通过上述通道形成的 EMRI 系统^[15, 21-23]。

根据无毛定理, 经典黑洞由 3 个参数完全确定: 质量、自旋和电荷^[24-29]。考虑到在真实的天体物理环境中, 黑洞会快速失去携带的电荷, 可以视作电中性^[30-33]。综合以上两点, 黑洞周围的时空几何完全由 Kerr 度规描述。因此, 对无毛定理的检验可以归结为检验一个黑洞是否为 Kerr 黑洞。MBH 的背景时空可通过多极矩展开描述^[34-36]。对于 Kerr 黑洞, 高阶多极矩完全由黑洞质量和自旋确定^[37, 38]。多极矩结构在不同引力理论中有所不同, 因此, 可以通过对高阶多极矩的测量来检验 Kerr 度规。除了质量和角动量, 四极矩为多极矩中的主导项, 本文将通过测量四极矩来验证 Kerr 度规。此前的研究已指出, EMRI 信号的观测与分析能以较高精度实现这一目标。Barack 和 Cutler^[39, 40]用一个由无量纲四极矩参数表征的四极矩修正 AK (analytical kludge) 模板 EMRI 波形, 发现在给定中心 MBH 质量的情况下, LISA 能将这个无量纲参数限制到 10^{-4} 量级。Babak 等人^[15]、Fan 等人^[41]分别研究了 LISA、天琴对非 Kerr 四极矩的约束能力。

为了以模型无关的方式对 Kerr 度规进行检验, 研究者提出了几种参数化度规^[42-44], 其中由 Konoplya、Rezzolla 和 Zhidenko 提出的稳态、轴对称度规, 以下简称为 KRZ 度规, 为描述黑洞周围时空提供了一种有效、通用的参数化方法。其利用极角方向的幂级数展开和径向的 Padé 近似, 仅需低阶展开即可在全空间准确复现 Kerr 等黑洞的度规, 因此在黑洞视界附近有更好的收敛性; 而且可以通过调整 KRZ 度规中的变形参数, 得到其他引力理论的度规。这些优点使得 KRZ 度规成为检验 Kerr 度规的绝佳工具。

本文将利用 KRZ 度规向 EMRI 波形中引入额外四极矩, 仿真 LISA、太极对 EMRI 波形的观测数据, 并通过对额外四极矩的测量来检验无毛定理。本文的结构如下: 第 2 章介绍从 KRZ 度规到 Bumpy 度规的变换, 并利用 NK (numerical kludge) 方法计算由 KRZ 度规得到的 EMRI 波形; 第 3 章应用 Fisher 矩阵对四极矩的测量精度进行估计。全文均采用几何单位制 ($G = c = 1$)。

2 任意轴对称黑洞 EMRI 波形

其他引力理论的稳态轴对称黑洞解与 Kerr 黑洞解的差异可以由它们的四极矩的差异表现出来。向 Kerr 黑洞 EMRI 波形中引入额外四极矩并对这一额外四极矩进行测量, 可以检验是否存在违反无毛定理的情况。本章将介绍如何根据额外四极矩调整 KRZ 度规中的参数, 使其变为对应的 Bumpy 黑洞^[45]度规以及使用 KRZ 度规计算 EMRI 波形。

2.1 从 KRZ 度规到 Bumpy 度规

Konoplya、Rezzolla 和 Zhidenko 提出的 KRZ 度规为描述一般稳态黑洞的轴对称黑洞时空提供了一种有效的参数化方法, 其中包含了一组变形参数, 用于衡量其相对于 Kerr 度规的偏移。选择合适的变形参数, KRZ 度规可以转变为 Kerr 度规、Bumpy 黑洞度规等常见的引力理论中的度规。在 Boyer-Lindquist 坐标系中, KRZ 度规的线元如下:

$$ds^2 = - \frac{N^2(\tilde{r}, \theta) - W^2(\tilde{r}, \theta) \sin^2 \theta}{K^2(\tilde{r}, \theta)} dt^2 - 2W(\tilde{r}, \theta) \tilde{r} \sin^2 \theta dt d\phi + K^2(\tilde{r}, \theta) \tilde{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \Sigma(\tilde{r}, \theta) \left(\frac{B^2(\tilde{r}, \theta)}{N^2(\tilde{r}, \theta)} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2 \right). \quad (1)$$

上式中的函数 $K(\tilde{r}, \theta)$, $N(\tilde{r}, \theta)$, $W(\tilde{r}, \theta)$, $B(\tilde{r}, \theta)$ 可以展开为 $\cos \theta$ 的级数, 其最低阶的表达式为:

$$N^2 = (1 - r_0/\tilde{r}) \left[1 - \epsilon_0 r_0/\tilde{r} + (k_{00} - \epsilon_0) r_0^2/\tilde{r}^2 + \delta_1 r_0^3/\tilde{r}^3 \right] + \left\{ a_{20} r_0^3/\tilde{r}^3 + a_{21} r_0^4/\tilde{r}^4 + k_{21} r_0^3/\tilde{r}^3 \left[1 + \frac{k_{22} (1 - r_0/\tilde{r})}{1 + k_{23} (1 - r_0/\tilde{r})} \right]^{-1} \right\} \cos^2 \theta, \quad (2)$$

$$B = 1 + \delta_4 r_0^2/\tilde{r}^2 + \delta_5 r_0^2 \cos^2 \theta/\tilde{r}^2, \quad (3)$$

$$W = [w_{00} r_0^2/\tilde{r}^2 + \delta_2 r_0^3/\tilde{r}^3 + \delta_3 r_0^3/\tilde{r}^3 \cos^2 \theta] / \Sigma, \quad (4)$$

$$K^2 = 1 + aW/r + \left\{ k_{00} r_0^2/\tilde{r}^2 + k_{21} r_0^3/\tilde{r}^3 \left[1 + \frac{k_{22} (1 - r_0/\tilde{r})}{1 + k_{23} (1 - r_0/\tilde{r})} \right]^{-1} \cos^2 \theta \right\} / \Sigma, \quad (5)$$

其中,

$$\tilde{r} = r/M, \quad \tilde{a} = a/M, \quad \Sigma = 1 + a^2 \cos^2 \theta/\tilde{r}^2, \\ a_{20} = 2\tilde{a}^2/r_0^3, \quad a_{21} = -a_{20} - k_{21}, \quad \epsilon_0 = (2 - r_0)/r_0, \quad k_{00} = \tilde{a}^2/r_0^2, \quad w_{00} = 2\tilde{a}/r_0^2. \quad (6)$$

本文沿用了 Li 和 Han^[46]对 KRZ 度规参数作出的约定:

$$\begin{cases} a_{01} \leftrightarrow \delta_1, & b_{21} \leftrightarrow \delta_5 \\ \omega_{01} \leftrightarrow \delta_2, & k_{21} \leftrightarrow \tilde{a}^4/r_0^4 - 2\tilde{a}^2/r_0^3 - \delta_6 \\ \omega_{21} \leftrightarrow \delta_3, & k_{22} \leftrightarrow -\tilde{a}^2/r_0^2 + \delta_7 \\ b_{01} \leftrightarrow \delta_4, & k_{23} \leftrightarrow \tilde{a}^2/r_0^2 + \delta_8 \end{cases}. \quad (7)$$

当所有 δ_i 取 0 时 ($\delta_i = 0$), KRZ 度规就转变成 Kerr 度规。

Bumpy 黑洞的多极矩结构与相对论预言的经典黑洞存在部分偏离, 当这些偏离被设置为零时, Bumpy 黑洞就退化成标准黑洞, 如 Schwarzschild 黑洞或 Kerr 黑洞。Bumpy 黑洞在

Boyer-Lindquist 坐标系中的线元为:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -e^{2\psi_1} \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 + e^{2\psi_1 - \gamma_1} (1 - e^{\gamma_1}) \frac{4a^2 Mr \sin^2 \theta}{\Delta \Sigma} dt dr - \\
 & e^{2\psi_1 - \gamma_1} \frac{4a^2 Mr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + e^{2\gamma_1 - 2\psi_1} \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)^{-1} \times \\
 & \left[1 + e^{-2\gamma_1} (1 - 2e^{\gamma_1}) \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} - e^{4\psi_1 - 4\gamma_1} (1 - e^{\gamma_1})^2 \frac{4a^4 M^2 r^2 \sin^4 \theta}{\Delta^2 \Sigma^2}\right] dr^2 - \\
 & 2(1 - e^{\gamma_1}) a \sin^2 \theta \left[e^{-2\psi_1} \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)^{-1} - e^{2\psi_1 - 2\gamma_1} \frac{4a^2 M^2 r^2 \sin^2 \theta}{\Delta \Sigma (\Sigma - 2Mr)}\right] dr d\phi + \\
 & e^{2\gamma_1 - 2\psi_1} \Sigma d\theta^2 + \Delta \left[e^{-2\psi_1} \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)^{-1} - e^{2\psi_1 - 2\gamma_1} \frac{4a^2 M^2 r^2 \sin^2 \theta}{\Delta \Sigma (\Sigma - 2Mr)}\right] \sin^2 \theta d\phi^2,
 \end{aligned} \tag{8}$$

其中, $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2$, γ_1 和 ψ_1 分别是由质量矩和自旋矩扰动引起的扰动势^[45,47]。在没有扰动的情况下 ($\gamma_1 = 0, \psi_1 = 0$), Bumpy 黑洞度规退化为 Kerr 度规。Vigeland 和 Hughes^[47] 给出 Bumpy 黑洞在 Boyer-Lindquist 坐标系中的四极扰动势 ($l = 2$):

$$\begin{aligned}
 \psi_1^{l=2}(r, \theta) &= \frac{B_2 M^3}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{1}{d(r, \theta, a)^3} \left[\frac{3L(r, \theta, a)^2 \cos^2 \theta}{d(r, \theta, a)^2} - 1 \right], \\
 \gamma_1^{l=2}(r, \theta) &= B_2 \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left[\frac{L(r, \theta, a) [c_{20}(r, a) + c_{22}(r, a) \cos^2 \theta + c_{24}(r, a) \cos^4 \theta]}{2 d(r, \theta, a)^5} - 1 \right],
 \end{aligned} \tag{9}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 d(r, \theta, a) &= \sqrt{r^2 - 2Mr + (M^2 + a^2) \cos^2 \theta}, \\
 L(r, \theta, a) &= \sqrt{(r - M)^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \\
 c_{20}(r, a) &= 2(r - M)^4 - 5M^2(r - M)^2 + 3M^4, \\
 c_{22}(r, a) &= 5M^2(r - M)^2 - 3M^4 + a^2 [4(r - M)^2 - 5M^2], \\
 c_{24}(r, a) &= a^2 (2a^2 + 5M^2),
 \end{aligned} \tag{10}$$

B_2 由 Bumpy 四极矩公式确定:

$$Q_B = -Ma^2 - B_2 M^3 \sqrt{5/4\pi} = Q_K + \Delta Q. \tag{11}$$

我们选取了 Li 和 Han^[46] 给出的 KRZ 度规参数, 使其退化为 Bumpy 黑洞度规:

$$\begin{cases} \delta_1 = \left[(2\psi_1 + 1) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \delta_6 \frac{r_0^3}{r^3} \cos^2 \theta\right) - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \right] / \left[\frac{r_0^3}{r^3} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \right] \\ \delta_6 = \frac{2\psi_1 r^5}{r_0^3} \tan^2 \theta \\ \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 0 \end{cases}. \tag{12}$$

2.2 波形计算方法

EMRI 系统的极端质量比意味着我们可以使用黑洞微扰理论计算得到高精度的 EMRI 波形^[48]。为进一步提高波形精度，绕转的恒星级致密天体自身的引力场对轨道的影响，通常被称为引力自力（gravitational self-force）效应，目前也已被有效地纳入这个框架之下^[49]。但是这种方法求解过程复杂，需要消耗大量计算资源，不适用于需要快速高效地生成波形的情形。在实际应用中，近似模板 AK^[39]、NK^[50] 以及 AAK^[51] (augmented analytic kludge) 也被广泛采用，这些近似波形模板在保留波形的主要特征的同时，还能满足高效的波形生成需求。

本文采用了文献 [52, 53] 中介绍的 NK 方法。其具体实现方式为：将向超大质量黑洞旋近的致密星体视为测试粒子，在给定超大质量黑洞周围的度规之后，就可以通过对测地线方程进行数值积分得到测试粒子的运动轨迹；然后，使用四极矩公式从测试粒子测地线中求得引力波。由于引力波辐射，轨道的能量、角动量等不再守恒，在计算引力波的辐射反作用后，通过能量、角动量和卡特常数的变化，对轨道进行修正。在本节中，希腊字母 $(\mu, \nu, \sigma, \dots)$ 表示从 0 到 3 的指标，并且默认采用爱因斯坦求和约定。

粒子的测地线方程如下：

$$\dot{u}^\mu = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu u^\rho u^\sigma, \quad (13)$$

$$\dot{x}^\mu = u^\mu, \quad (14)$$

其中， x^μ 是粒子的 Boyer-Lindquist 坐标， u^μ 是 4-速度， $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ 是克里斯托弗联络。在积分过程中，我们利用质量、能量和角动量的守恒来监视数值误差。在积分的每一步中，我们都检查一次守恒量，即 4-速度的模 $|u|$ 、能量 E 和角动量的 z 分量 L_z ：

$$|u| = -1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad (15)$$

$$E = -u_t = -g_{tt} u^t - g_{t\phi} u^\phi, \quad (16)$$

$$L_z = u_\phi = g_{t\phi} u^t + g_{\phi\phi} u^\phi. \quad (17)$$

在 Kerr 情形下，卡特常数 Q 同样需要检查^[54]：

$$Q = (g_{\theta\theta} u^\theta)^2 + \cos^2 \theta \left(a^2 (\eta^2 - E^2) + \left(\frac{L_z}{\sin \theta} \right)^2 \right). \quad (18)$$

在计算过程中，考虑到波形的精度要求保持在 10^{-5} （对一个典型的 EMRI，通常波形精度要求 10^5 周期后相位误差小于 1 弧度），因此我们始终保持上述守恒量的相对偏移在 10^{-7} 以内。

Kerr 时空中的稳定有界测地线可以使用三个参数（偏心率 e 、半通径 p 和倾角 ι ）来表征。它们的定义如下：

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}, \quad p = \frac{2r_a r_p}{r_a + r_p}, \quad \iota = \frac{\pi}{2} - \theta_{\min}, \quad (19)$$

其中， r_a 是远星点， r_p 是近星点， θ_{\min} 是沿测地线的 θ 坐标的最小值。在 Kerr 时空中，我们可以从三个守恒量 E ， L_z ， Q 确定三个轨道参数 e ， p ， ι ，反之亦然。在 KRZ 时空中，我们

仍然沿用这些定义, 即对于数值生成的轨迹, 我们仍然通过上述关系用 $(r_a, r_p, \theta_{\min})$ 定义 (e, p, ι) 。

若考虑辐射反作用对波形的影响, 则将式 (13) 修正为:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu u^\rho u^\sigma + \mathcal{F}^\mu, \quad (20)$$

辐射力 \mathcal{F}^μ 可由辐射通量 $(\dot{E}, \dot{L}_z, \dot{Q})$ 求得:

$$\begin{cases} \dot{E}u^t = -g_{tt}\mathcal{F}^t - g_{t\phi}\mathcal{F}^\phi \\ \dot{L}_z u^t = g_{t\phi}\mathcal{F}^t + g_{\phi\phi}\mathcal{F}^\phi \\ \dot{Q}u^t = 2g_{\theta\theta}^2 u^\theta \mathcal{F}^\theta + 2\cos^2\theta a^2 E \dot{E} + 2\cos^2\theta \frac{L_z \dot{L}_z}{\sin^2\theta} \\ g_{\mu\nu} u^\mu \mathcal{F}^\nu = 0 \end{cases} \quad (21)$$

在生成粒子轨迹之后, 我们根据球坐标系 (而不是 Boyer-Lindquist 坐标系) 的定义将 (r, θ, ϕ) 转换成笛卡尔坐标系中的坐标 (x, y, z) , 即:

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta. \quad (22)$$

最后, 为了计算引力波波形的, 我们仍然使用基于爱因斯坦场方程的四极辐射公式。这是因为我们假设, 即使黑洞偏离无毛定理, 偏移也是微弱的, 由此导致的波形振幅修正为高阶小量, 再考虑到引力波探测主要对相位 (而不是振幅) 敏感, 因此采用如下的四极辐射公式进行近似计算:

$$\bar{h}^{jk}(t, x) = \frac{2}{r} [\ddot{I}^{jk}(t')]_{t'=t-r}, \quad (23)$$

$$I^{jk} = \mu x_p^j x_p^k. \quad (24)$$

其中, $\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}$ 为迹反转度规微扰 (trace-reversed metric perturbation)。将波形转换到横迹规范 (transverse-traceless gauge) 下, 然后我们就得到了波形在极角 θ 和方位角 ϕ 下的 “+” 分量和 “ \times ” 分量:

$$\begin{cases} h_+ = h^{\theta\theta} - h^{\phi\phi} = \\ \quad \left\{ \cos^2\theta [h^{xx} \cos^2\Phi + h^{xy} \sin 2\Phi + h^{yy} \sin^2\Phi] + h^{zz} \sin^2\theta - \right. \\ \quad \left. \sin 2\theta [h^{xz} \cos\Phi + h^{yz} \sin\Phi] \right\} - [h^{xx} \sin^2\Phi - h^{xy} \sin 2\Phi + h^{yy} \cos^2\Phi] \\ h_\times = 2h^{\theta\phi} = \\ \quad 2 \left\{ \cos\theta \left[-\frac{1}{2}h^{xx} \sin 2\Phi + h^{xy} \cos 2\Phi + \frac{1}{2}h^{yy} \sin 2\Phi \right] + \sin\theta [h^{xz} \sin\Phi - h^{yz} \cos\Phi] \right\} \end{cases} \quad (25)$$

3 数据分析

3.1 时间延迟干涉技术

典型的空问引力波探测器由 3 颗卫星组成，它们在轨道上运行时几乎保持一个等边三角形的构型。这些探测器通过测量两颗卫星间交换的激光多普勒频移来观测引力波造成的扰动。然而，由于卫星间的相对运动，空问引力波探测器无法像地面探测器一样维持等臂。两束激光在光电探测器上汇聚时，其中的激光频率噪声由于经过了不同的延迟，不能有效抵消，而激光频率噪声幅度可能比目标引力波信号强几个数量级，将完全阻碍信号的观测。为了抑制激光频率噪声，时间延迟干涉技术（time-delay interferometry, TDI）应运而生^[55-57]。TDI 的工作原理为通过在信号中引入适当时间延迟以及线性组合多个干涉信号来构建虚拟的等臂干涉仪。

第一代 TDI 组合能够有效消除稳定不等臂阵列（卫星之间距离保持不变）中的激光频率噪声，其 Michelson 组合 X_1 通道如下^[58]：

$$X_1 = y_{13} + \mathbf{D}_{13}y_{31} + \mathbf{D}_{131}y_{12} + \mathbf{D}_{1312}y_{21} - [y_{12} + \mathbf{D}_{12}y_{21} + \mathbf{D}_{121}y_{13} + \mathbf{D}_{1213}y_{31}], \quad (26)$$

式中：

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{ij}x(t) &= x(t - L_{ij}(t)), \\ \mathbf{D}_{i_1, i_2, \dots, i_n}x(t) &= x\left(t - \sum_{k=1}^{n-1} L_{i_k i_{k+1}}(t)\right), \end{aligned} \quad (27)$$

其中， y_{ij} 是激光沿链接 ij 行进后的相对频移， \mathbf{D} 是时间延迟算符， $L_{ij}(t)$ 是在接收时间 t 沿链接 ij 的传播时间， $x(t)$ 是任意数据流，其他的两个 Michelson 通道 Y_1 、 Z_1 可通过循环排列卫星指标得到。

第一代 TDI 只能用于卫星之间刚性连接的理想情况。在实际中，卫星间的相对运动不能忽略，第二代 TDI 因此被开发出来，其中的 Michelson 组合 X_2 通道为：

$$X_2 = X_1 + \mathbf{D}_{13121}y_{12} + \mathbf{D}_{131212}y_{21} + \mathbf{D}_{1312121}y_{13} + \mathbf{D}_{13121213}y_{31} - [\mathbf{D}_{12131}y_{13} + \mathbf{D}_{121313}y_{31} + \mathbf{D}_{1213131}y_{12} + \mathbf{D}_{12131312}y_{21}]. \quad (28)$$

同样的，其他两个通道 Y_2 、 Z_2 可通过循环排列卫星指标得到。Michelson 通道中包含了相关噪声，一组去相关的 TDI 组合 (A, E, T) 可由 (X, Y, Z) 线性组合得到：

$$\begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z - X) \\ E = \frac{1}{\sqrt{6}}(X - 2Y + Z) \\ T = \frac{1}{\sqrt{3}}(X + Y + Z) \end{cases} \quad (29)$$

在本文中，我们将对 A 通道的观测数据进行仿真。

3.2 Fisher 信息矩阵

在探测到引力波信号后, 下一步就是确定引力波源的物理参数, 这通常需要使用马尔科夫链蒙特卡罗采样方法, 求得由贝叶斯推断确定的参数后验概率分布。但是引力波参数空间维数较高, 蒙特卡罗方法需要采集大量的样本点, 这会极大增加计算时间。相比之下, Fisher 矩阵不会搜索整个参数空间, 仅能预测给定参数的引力波信号的测量误差, 但是消耗的计算资源较少, 可以用作精确计算前的预处理过程。

定义似然 L 如下:

$$L(x | \theta) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \langle x - h(\theta) | x - h(\theta) \rangle \right], \quad (30)$$

其中 $x = n + s$ 为测得的数据, 它是实际引力波信号 s 与噪声 n 之和; $h(\theta)$ 是使用的引力波信号模板, θ 表示信号的各种参数 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots\}$; $\langle h_1 | h_2 \rangle$ 表示两个信号的内积:

$$\langle h_1 | h_2 \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}_1(f) \tilde{h}_2^*(f)}{S_n(f)} df = 4 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{h}_1(f) \tilde{h}_2^*(f)}{S_n(f)} df, \quad (31)$$

其中 $S_n(f)$ 为探测器的噪声功率谱密度。在已知波形模板的情况下, Fisher 矩阵可通过如下方式求得:

$$\Gamma_{ij} = - \left. \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\theta=\theta_0} = \left\langle \frac{\partial h}{\partial \theta_i} \middle| \frac{\partial h}{\partial \theta_j} \right\rangle \bigg|_{\theta=\theta_0}, \quad (32)$$

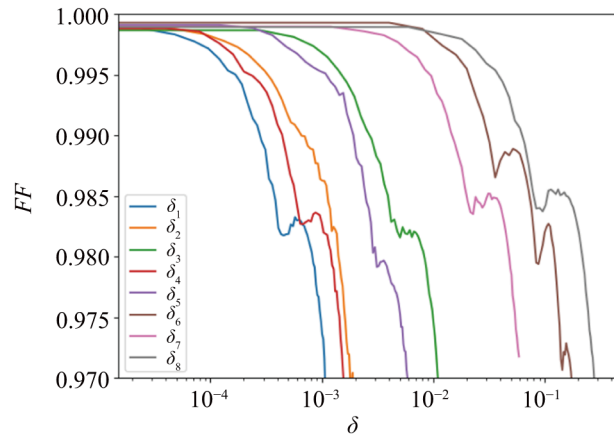
其中 Γ_{ij} 的逆矩阵为参数误差的协方差矩阵, 每个参数的误差 σ_i 以及两个参数之间的相关系数 c_{ij} 为:

$$\sigma_i = \sqrt{(\Gamma^{-1})_{ii}}, \quad c_{ij} = \frac{(\Gamma^{-1})_{ij}}{\sqrt{(\Gamma^{-1})_{ii} (\Gamma^{-1})_{jj}}}. \quad (33)$$

3.3 结果分析

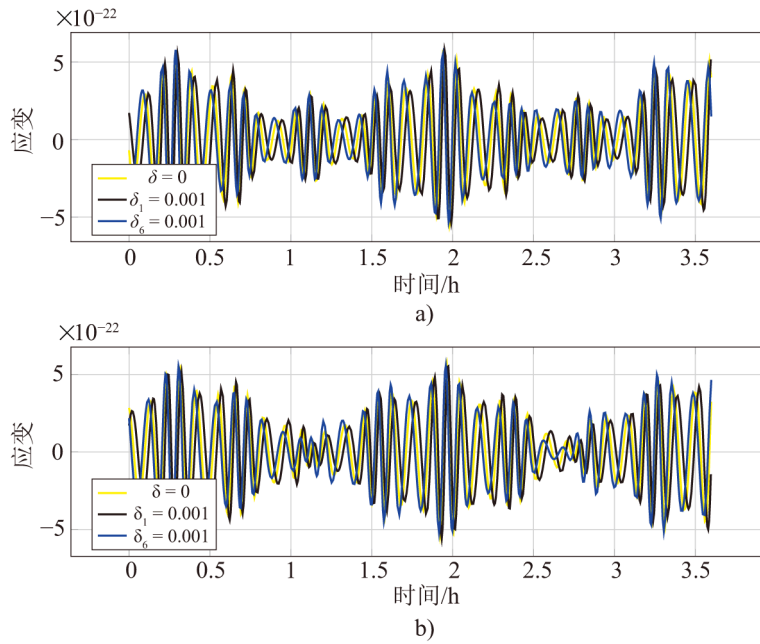
图 1 为经过 TDI 处理后的波形之间的匹配因子随着变形参数 δ 变化的图像, 以所有 δ 值为 0 时的波形为基准, 改变某个 δ 时, 其余 δ 值都设为 0。可以看出, $\delta_1, \delta_2, \delta_4$ (分别对应图 1 中蓝、橙、红线) 对匹配因子的影响更加显著, 在 δ 达到 10^{-3} 量级时, 匹配因子就降至 0.97 以下; 与此相对, $\delta_6, \delta_7, \delta_8$ (分别对应图 1 中棕、粉、灰线) 对匹配因子的影响则相对较弱。图 2 和图 3 进一步展示了这种差别。图 2 为 2.2 节中介绍的波形计算方法生成的 EMRI 波形, a)、b) 图分别为波形 “+” 分量和 “×” 分量, 黄、黑、蓝线分别对应所有 δ 取 0、仅改变 δ_1 至 0.001 以及仅改变 δ_6 至 0.001 三种情形, 可以看到, 改变 δ_1 的波形与对照组波形更快出现相位偏移。图 3 展示了图 1、2 的波形在 LISA 的 TDI-A 通道中仿真结果, 可见改变 δ_1 带来的影响更加明显。

我们仿真了太极、LISA 的 TDI-A 通道对引入了四极矩偏离的 EMRI 波形的响应, 并使用 Fisher 信息矩阵对四极矩的误差进行了估计, 使用的信号信噪比约为 50, 结果如图 4 所示。图 4 a)、b) 分别表示四极矩的估计精度 $\sigma(\Delta Q)/\Delta Q$ 对相对四极矩偏离 $\Delta Q/Q_{\text{kerr}}$ 和 MBH 自旋的依赖关系, 可以看到, 太极和 LISA 在我们所选取的参数范围内, 均能将 ΔQ 的精度限制在



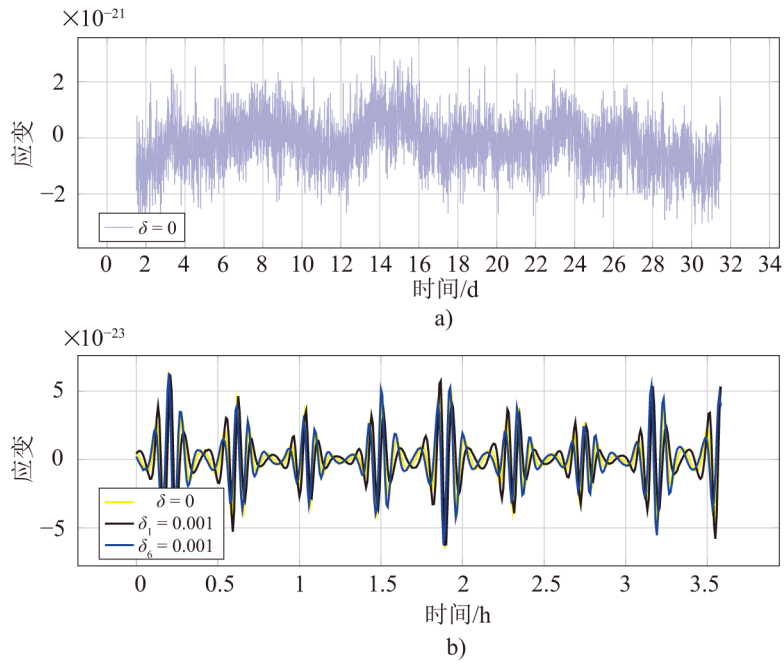
注：基准波形的参数为：主星质量 $M = 2.0 \times 10^6 M_{\odot}$ 、质量比 $\mu = 1.0 \times 10^{-5}$ 、主星自旋 $S = 0.9$ 、演化开始轨道离心率 $e = 0.5$ 、半通径 $p = 10$ 。

图 1 改变单个变形参数 δ 对 LISA 的 TDI-A 通道信号匹配因子的影响



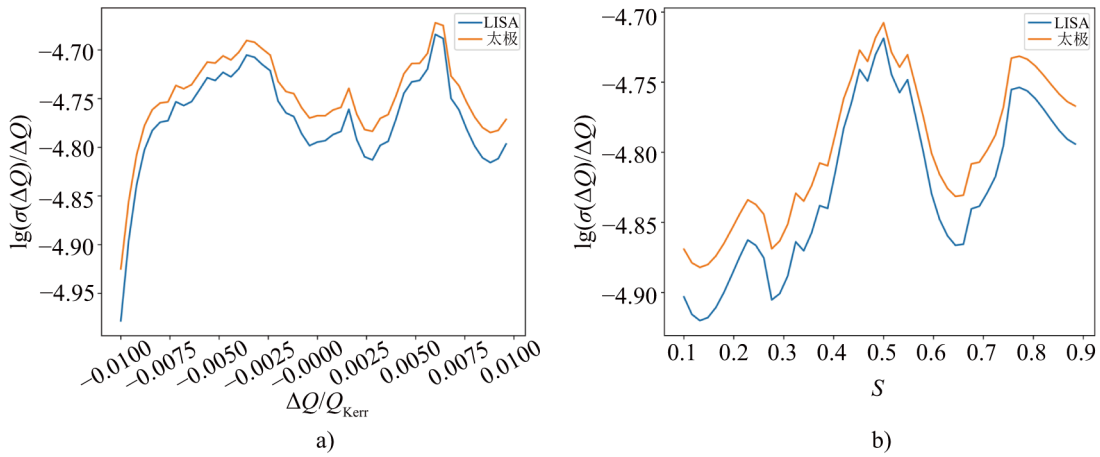
注：a)、b) 分别为波形”+”分量和”x”分量。波形参数为：主星质量 $M = 2.0 \times 10^6 M_{\odot}$ 、质量比 $\mu = 1.0 \times 10^{-5}$ 、主星自旋 $S = 0.9$ 、演化开始轨道离心率 $e = 0.5$ 、半通径 $p = 10$ 。黄线为 KRZ 度规中的变形参数 δ 全部取 0 (Kerr) 的情形，黑线、蓝线分别为仅改变 δ_1 、 δ_6 至 0.001 得到的波形。

图 2 由 2.2 节中介绍的波形计算方法生成的 EMRI 波形



注: 波形参数与图 2 中一致。a) 图模拟了 A 通道中的信号与噪声, 持续时间 30 d; b) 图不包含噪声, 为图 1 中波形对应的 TDI-A 信号。

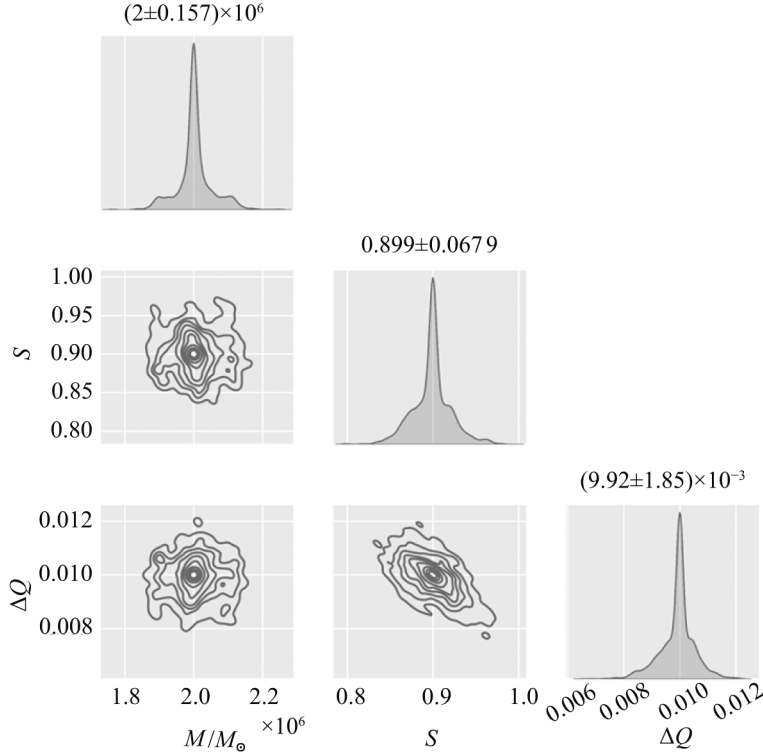
图 3 EMRI 波形在 LISA 的 TDI-A 通道中的仿真结果



注: a)、b) 图分别为四极矩的估计精度 $\sigma(\Delta Q)/\Delta Q$ 对相对四极矩偏离 $\Delta Q/Q_{\text{Kerr}}$ 和 MBH 自旋的依赖关系。蓝线和橙线分别为 LISA、太极的估计结果。

图 4 使用 Fisher 矩阵对 ΔQ 的估计结果

10^{-4} 数量级。太极和 LISA 的测量精度比较接近, 未来可以通过联合太极、LISA、天琴等多个探测器实现更高的探测精度。此外, 注意到较小自旋时, ΔQ 的估计精度略微提高, 这可能是由于较小自旋时波形结构相对简单, 提高了观测精度。最后, 为了研究质量、自旋以及 ΔQ 之间的相关性, 我们利用 Fisher 矩阵的结果, 得到了近似的后验概率分布, 具体实现方式为: 由 Fisher 矩阵得到参数的多元高斯分布, 从这个高斯分布中采样作为 MCMC 采样的起点, 这样的起点设置对于较简单的概率分布能加快马尔可夫链的收敛, 减少采样步数。结果如图 5 所示, 可以看出, 自旋与 ΔQ 之间存在较明显的负相关关系。



注: 注入信号的参数为 $(M, S, \Delta Q) = (2 \times 10^6 M_\odot, 0.9, 0.01)$ 。

图 5 由 Fisher 矩阵得到的质量 M 、自旋 S 、额外四极矩 ΔQ 的近似后验概率分布

4 总结与展望

本文主要探讨了 EMRI 信号在检验无毛定理上的潜力。EMRI 信号是揭示大质量黑洞周围时空性质的独特探针, 其旋近阶段的信号将在空间引力波探测器的灵敏频段内经历数万个周期, 因此极有可能通过匹配滤波以较高的信噪比被确认。在天体物理环境中, 对无毛定理的检验可以归结为对 Kerr 度规的检验。为此, 我们选取了 KRZ 参数化度规对 Kerr 度规开展模

型无关的检验, 并给出了从 KRZ 度规到 Bumpy 度规的参数变换关系, 然后展示了利用 KRZ 度规向 EMRI 波形模板中引入额外四极矩的方法。我们仿真了空间引力波探测器太极、LISA 的 TDI-A 通道对 EMRI 信号的响应, 并使用 Fisher 信息矩阵对 EMRI 信号约束四极矩偏离的能力进行了评估, 结果显示, 未来空间引力波探测器能将无毛定理约束至 10^{-4} 数量级。

参考文献:

- [1] Abbott B P, Abbott R, Abbott T, et al. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 061102
- [2] Abbott B P, Abbott R, Abbott T, et al. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 131103
- [3] Abbott B P, Abbott R, Abbott T, et al. *Physical Review X*, 2019, 9: 031040
- [4] Abbott R, Abbott T, Abraham S, et al. *Physical Review X*, 2021, 11: 021053
- [5] Abbott R, Abbott T, Acernese F, et al. *Physical Review D*, 2024, 109: 022001
- [6] Abbott R, Abbott T, Acernese F, et al. *Physical Review X*, 2023, 13: 041039
- [7] Danzmann K. *Classical and Quantum Gravity*, 1997, 14: 1399
- [8] Amaro-Seoane P, Audley H, Babak S, et al. <https://arxiv.org/abs/170200786>, 2017
- [9] Colpi M, Danzmann K, Hewitson M, et al. <https://arxiv.org/abs/240207571>, 2024
- [10] Hu W R, Wu Y L. *National Science Review*, 2017, 4: 685
- [11] Gong Y, Luo J, Wang B. *Nature Astronomy*, 2021, 5: 881
- [12] Luo J, Chen L S, Duan H Z, et al. *Classical and Quantum Gravity*, 2016, 33: 035010
- [13] Klein A, Barausse E, Sesana A, et al. *Physical Review D*, 2016, 93: 024003
- [14] Sesana A. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 231102
- [15] Babak S, Gair J, Sesana A, et al. *Physical Review D*, 2017, 95: 103012
- [16] Hils D, Bender P L. *Astrophysical Journal, Part 2-Letters (ISSN 0004-637X)*, 1995, 445: L7
- [17] Sigurdsson S, Rees M J. *MNRAS*, 1997, 284: 318
- [18] Alexander T. *Physics Reports*, 2005, 419: 65
- [19] Merritt D. *Reports on Progress in Physics*, 2006, 69: R01
- [20] Bortolas E, Mapelli M. *MNRAS*, 2019, 485: 2125
- [21] Amaro-Seoane P, Aoudia S, Babak S, et al. *Classical and Quantum Gravity*, 2012, 29: 124016
- [22] Mapelli M, Ripamonti E, Vecchio A, et al. *Astronomy & Astrophysics*, 2012, 542: A102
- [23] Berry C P, Cole R H, Canizares P, et al. *Physical Review D*, 2016, 94: 124042
- [24] Israel W. *Physical Review*, 1967, 164: 1776
- [25] Israel W. *Communications in Mathematical Physics*, 1968, 8: 245
- [26] Carter B. *Phys Rev Lett*, 1971, 26: 331
- [27] Robinson D C. *Phys Rev Lett*, 1975, 34: 905
- [28] Hawking S W. *Phys Rev Lett*, 1971, 26: 1344
- [29] Hawking S W. *Communications in Mathematical Physics*, 1972, 25: 152
- [30] Gibbons G W. *Communications in Mathematical Physics*, 1975, 44: 245
- [31] Goldreich P, Julian W H. *Astrophysical Journal*, 1969, 157: 869
- [32] Ruderman M, Sutherland P G. *Astrophysical Journal*, 1975, 196: 51
- [33] Blandford R D, Znajek R L. *MNRAS*, 1977, 179: 433
- [34] Thorne K S. *Reviews of Modern Physics*, 1980, 52: 299
- [35] Bäckdahl T. *Classical and Quantum Gravity*, 2007, 24: 2205
- [36] Compere G, Oliveri R, Seraj A. *Journal of High Energy Physics*, 2018, 2018: 1
- [37] Geroch R. *Journal of Mathematical Physics*, 1970, 11: 2580
- [38] Hansen R O. *Journal of Mathematical Physics*, 1974, 15: 46
- [39] Barack L, Cutler C. *Physical Review D*, 2004, 69: 082005
- [40] Barack L, Cutler C. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2007, 75: 042003

- [41] Fan H M, Hu Y M, Barausse E, et al. *Physical Review D*, 2020, 102: 063016
- [42] Johannsen T, Psaltis D. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2011, 83: 124015
- [43] Rezzolla L, Zhidenko A. *Physical Review D*, 2014, 90: 084009
- [44] Konoplya R, Rezzolla L, Zhidenko A. *Physical Review D*, 2016, 93: 064015
- [45] Collins N A, Hughes S A. *Physical Review D*, 2004, 69: 124022
- [46] Li S, Han W B. *Physical Review D*, 2023, 108: 083032
- [47] Vigeland S J, Hughes S A. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2010, 81: 024030
- [48] Poisson E, Pound A, Vega I. *Living Reviews in Relativity*, 2011, 14: 1
- [49] Barack L, Pound A. *Reports on Progress in Physics*, 2018, 82: 016904
- [50] Gair J R, Glampedakis K. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2006, 73: 064037
- [51] Chua A J, Moore C J, Gair J R. *Physical Review D*, 2017, 96: 044005
- [52] Babak S, Fang H, Gair J R, et al. *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2007, 75: 024005
- [53] Xin S, Han W B, Yang S C. *Physical Review D*, 2019, 100: 084055
- [54] Carter B. *Physical Review*, 1968, 174: 1559
- [55] Tinto M, Armstrong J W. *Physical Review D*, 1999, 59: 102003
- [56] Armstrong J, Estabrook F, Tinto M. *Astrophysical Journal*, 1999, 527: 814
- [57] Tinto M, Dhurandhar S V. *Living Reviews in Relativity*, 2021, 24: 1
- [58] Tinto M, Estabrook F B, Armstrong J. *Physical Review D*, 2004, 69: 082001

Testing the Black Hole No-Hair Theorem with Extreme Mass Ratio Inspirals

YI Changhong¹, WANG Binglin^{2,3}, HAN Wenbiao^{2,1,3}

(1. School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences, Hangzhou Institute for Advanced Study, UCAS, Hangzhou 310024, China; 2. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China;

3. School of Astronomy and Space Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Extreme Mass Ratio Inspirals (EMRIs) are important sources for future space-based gravitational wave detectors, as they provide precise spacetime information around supermassive black holes (SMBHs), allowing for rigorous tests of the black hole no-hair theorem. However, previous simulations have often relied on model-dependent black hole models or simplified simulation data. In this study, we used a parametrized, axisymmetric black hole metric to compute the gravitational waveforms of EMRIs. We then simulated space-based gravitational wave observation data using the Time Delay Interferometry (TDI) technique. Utilizing the Fisher information matrix, we assessed the ability to test deviations in the black hole's quadrupole moment through gravitational waves. The results show that future space-based gravitational wave detectors can constrain the no-hair theorem to the level of 10^{-4} .

Key words: black hole; EMRI; parametrized metric; no-hair theorem