

# 熵校准混合长参数对恒星结构和演化及锂元素丰度的影响\*

黎正阳 杨伍明<sup>†</sup> 刘仲洋

(北京师范大学物理与天文学院 北京 100875)

**摘要** 在传统的恒星演化研究中,混合长参数 $\alpha_{\text{MLT}}$ 通常被设为固定值.然而,许多研究发现 $\alpha_{\text{MLT}}$ 不应是恒定的.混合长参数 $\alpha_{\text{MLT}}$ 可以影响模型的绝热比熵,而三维辐射流体动力学模拟能给出绝热比熵的值,因此可以用来校准 $\alpha_{\text{MLT}}$ .利用两种模拟熵校准的 $\alpha_{\text{MLT}}$ 随恒星质量和年龄而变化.与标准模型相比,熵校准模型在主序早期具有更大的半径和更低的有效温度,而在主序晚期则相反.因此,熵校准模型的演化轨迹与标准模型存在显著差异.计算结果还揭示了其中一种熵函数不适用于主序前阶段,因为它会导致锂元素的过度消耗,与观测结果不符;相比之下,尽管另一种熵函数更加复杂,但它适用于主序前阶段.

**关键词** 恒星: 演化, 恒星: 基本参数, 恒星: 内部, 恒星: 小质量

**中图分类号**: P144; **文献标识码**: A

## 1 引言

在恒星物理的混合长理论(mixing-length theory, MLT<sup>[1]</sup>)中,人们假设湍流元在瓦解到周围流体<sup>[2]</sup>之前平均移动距离为 $l$ ,称之为“混合长度”.其大小表示为 $l = \alpha_{\text{MLT}} H_p$ ,其中 $H_p = -dr/d \ln p$ 是压强标高, $\alpha_{\text{MLT}}$ 是混合长参数.混合长参数是一个无量纲的自由参数,它是决定恒星演化模型半径的重要参数之一. $\alpha_{\text{MLT}}$ 并不能从MLT中确定,它的数值一般通过定标 $1 M_{\odot}$ 模型,使其在当前太阳年龄匹配太阳的观测参数而得到,随后,这一参数被推广应用到所有恒星中.基于太阳定标的 $\alpha_{\text{MLT}}$ 所建立的恒星演化模型,称为太阳校准模型(solar calibrated model, SCM),此 $\alpha_{\text{MLT}}$ 是一个不随年龄变化的常数.在对太阳定标时,它依赖于模

型的大气边界条件,包括物态方程、不透明度以及是否考虑元素扩散等物理输入.

在混合长理论建立后的数十年间,学术界普遍采用太阳定标的 $\alpha_{\text{MLT}}$ 来计算恒星演化模型.然而,直接将它应用于其他恒星模型时,则忽略了 $\alpha_{\text{MLT}}$ 与其他物理量之间的依赖关系,从而为类太阳恒星的结构与演化的研究引入不确定性. Lebreton等<sup>[3]</sup>和Bonaca等<sup>[2]</sup>的研究表明, $\alpha_{\text{MLT}}$ 的大小应该依赖于恒星的金属丰度;Yıldız等<sup>[4]</sup>的研究则表明, $\alpha_{\text{MLT}}$ 应该与恒星质量有关.进一步地,Viani等<sup>[5]</sup>发现 $\alpha_{\text{MLT}}$ 是恒星有效温度、表面重力加速度和金属丰度的函数.因此, $\alpha_{\text{MLT}}$ 应该是一个随恒星质量、年龄和金属丰度等参数而改变的量,而非固定常数.

在给定的物理输入下, $\alpha_{\text{MLT}}$ 的数值可以表征

2025-03-15收到原稿, 2025-05-15收到修改稿

\*国家自然科学基金项目(12573032), 中国载人航天工程巡天空间望远镜专项科学研究项目(CMS-CSST-2025-A12、CMS-CSST-2025-A15)资助

<sup>†</sup> yangwuming@bnu.edu.cn

对流传能效率, 是描述对流区特征的关键参数之一<sup>[6]</sup>. 具体而言,  $\alpha_{\text{MLT}}$  越小, 对流传能效率越低, 对应的对流传输的能量通量也越小. 类太阳恒星的外层具有一个较厚的对流区, 对流传能效率的变化会直接影响恒星的半径, 进而改变其在赫罗图上的演化轨迹. 因此, 深入研究  $\alpha_{\text{MLT}}$  与对流相关的物理量之间的制约关系具有重要意义. 三维辐射流体动力学模拟(three-dimensional radiative hydrodynamics, 3D RHD)的发展, 为实现这一目标提供了新的研究方法.

由于类太阳恒星表面存在较高的不透明度, 我们难以直接观测其内部结构, 也无法有效获取对流运动的观测信息. 而 3D RHD 则为我们研究对流运动提供了新的手段. 大量的工作已经模拟研究了恒星的对流运动, 相关细节可以参考 Ludwig 等<sup>[7]</sup>、Magic 等<sup>[8]</sup>、Tanner 等<sup>[9]</sup> 和 Trampedach 等<sup>[10]</sup> 的工作. 对于研究恒星演化而言, 关键在于如何把 3D 模拟结果应用到 1D 恒星演化程序中, 特别是利用模拟结果来限制混合长参数以及这种修正相比于传统模型会对恒星结构和演化产生怎样的影响.

在类太阳恒星演化模型中, 比熵  $s$  随半径或深度变化, 并在表面附近接近一个常数. 早期研究<sup>[11]</sup> 就发现了这一现象, 之后的数值模拟也进一步证实了其普遍性<sup>[12, 7]</sup>. 在对流区的深层, 对流运动的高效混合使得温度梯度接近绝热温度梯度, 物理过程被认为是几乎绝热的, 因此该区域的比熵通常被称为绝热比熵. 这一熵值主要取决于恒星的压强、密度或温度等. Ireland 和 Browning<sup>[13]</sup> 将熵表示为

$$s \simeq s_0 + \frac{N_A k_B}{\mu} \ln \left[ \frac{T^{1/(\gamma-1)}}{\rho} \right], \quad (1)$$

其中,  $s_0$  是一个常数,  $N_A$  是阿伏伽德罗常数,  $k_B$  是波尔兹曼常数,  $\mu$  是平均分子量,  $T$  是温度,  $\rho$  是密度,  $\gamma$  是绝热指数. 在绝热过程中, 满足关系

$$\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{constant}, \quad (2)$$

即

$$T^{1/(\gamma-1)} \propto \rho, \quad (3)$$

因此有

$$\frac{T^{1/(\gamma-1)}}{\rho} = \text{constant}. \quad (4)$$

由此可知, 绝热比熵可以视为一个常数.

在数值模拟的研究中, 绝热比熵可以表示成有效温度、表面重力加速度和金属丰度的连续函数<sup>[12, 9]</sup>. 在恒星演化计算中,  $\alpha_{\text{MLT}}$  会影响恒星半径和重力加速度, 进而影响绝热比熵. 通过 3D RHD 数值模拟得到的绝热比熵  $s_{\text{ad,sim}}$  为约束混合长参数提供了重要依据. Ludwig 等<sup>[7]</sup> 首次给出了太阳金属丰度下的熵函数, 即  $s_{\text{ad,sim}}$  关于有效温度  $T_{\text{eff}}$  和表面重力加速度  $g$  的函数. 这一开创性的结果使得将 3D RHD 模拟应用到恒星演化计算中成为可能, 引起了广泛关注. Magic 等<sup>[8]</sup> 进一步扩展了参数范围, 建立了一个适用于有效温度从 4000 K 到 7000 K, 表面重力加速度  $\lg g$  从 1.5 到 5.0,  $[\text{Fe}/\text{H}]$  从 -4.0 到 +0.5 的熵函数. Tanner 等<sup>[12]</sup> 模拟了部分特定恒星模型的绝热比熵. Magic 等<sup>[8]</sup> 和 Tanner 等<sup>[12, 9]</sup> 证明了可以利用  $s_{\text{ad,sim}}$  来限制混合长参数. Spada 等<sup>[14-16]</sup> 和 Manchon 等<sup>[17]</sup> 则将这种方法应用到了具体的恒星演化计算中.

为了将 3D RHD 模拟结果应用到 1D 恒星演化程序中, Magic 等<sup>[8]</sup> 把绝热比熵的模拟结果表示成

$$s_{\text{ad,sim}}(x, y, z) = \zeta_a(z) + x\zeta_b(z) + y\zeta_c(z) + \zeta_d(z) \exp[x\zeta_e(z) + y\zeta_f(z)], \quad (5)$$

其中

$$x = \frac{T_{\text{eff}} - 5777}{1000}, \quad y = \lg g - 4.44, \quad z = [\text{Fe}/\text{H}], \quad (6)$$

$$\zeta_a = a_0 + a_1 z + a_2 z^2, \quad \zeta_b = b_0 + b_1 z + b_2 z^2, \quad (7)$$

$\zeta_c, \zeta_d, \zeta_e, \zeta_f$  以此类推, 其中  $a_i, b_i$  为参数, 它们的数值见表 1. Tanner 等<sup>[12]</sup> 采用不同的程序、初始元素混合比例、辐射转移方程和大气结构模拟了绝热比熵. 结合 Magic 等<sup>[8]</sup> 和他们自己的模拟结果, Tanner 等人把模拟结果表示成若干固定金属丰度下,  $s_{\text{ad,sim}}$  关于表面重力加速度和有效温度的函数. 例如在太阳金属丰度下

$$s_{\text{ad,sim}}(x) = 1.336 + 1.051 \exp\left(\frac{x - 3.485}{0.1056}\right), \quad (8)$$

其中

$$x = 0.9967 \lg T_{\text{eff}} - 0.0811 \lg g. \quad (9)$$

基于方程(8), Spada等<sup>[14]</sup>研究了熵校准 $\alpha_{\text{MLT}}$ 对太阳模型的影响. 该方法随后被用于研究半人马座 $\alpha$ 的A、B星<sup>[15, 17]</sup>以及红巨星<sup>[16, 18]</sup>. 然而需要指出的是, 由于重元素沉淀, 类太阳恒星演化过程中表面金属丰度会随年龄减小, 这使得方程(8)在研究恒星演化中的适用性受到限制. 相比之下, 方程(5)能够反映金属丰度变化对熵的影响, 尽管计算更复杂, 但它更适合用于研究恒星演化.

表 1 用于计算方程(5)中的 $\zeta$ 值的参数  
Table 1 The parameters for calculating the value of  $\zeta$  in Eq. (5)

$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$f_i$
0	1.5789	0.0784	-0.1076	0.1602	1.2867	-1.2136
1	0.0455	-0.0183	-0.0028	0.0618	-0.0824	-0.0338
2	0.0111	0.0071	-0.0042	0.0062	0.0970	-0.0764

太阳的初始锂丰度约为 $A(\text{Li}) = 3.3$  dex, 其中锂丰度定义为 $A(\text{Li}) = \lg(N_{\text{Li}}/N_{\text{H}}) + 12$ . 太阳光球层当前的锂丰度仅为 $(1.04 \pm 0.10)$  dex<sup>[19]</sup>. 这种显著的锂消耗现象不仅存在于太阳, 在其他一些恒星中也被观测到<sup>[20-21]</sup>. 太阳的锂元素在主序前和主序阶段都存在消耗机制<sup>[22]</sup>. 锂的有效燃烧温度大约是 $2.5 \times 10^6$  K, 太阳对流区底部的温度大约是 $2.2 \times 10^6$  K<sup>[22]</sup>. 因此, 对流区底部位置和太阳内部存在的物理过程都会影响锂丰度的值. 锂丰度可以用来诊断恒星的内部结构和物理过程等<sup>[22]</sup>, 是研究恒星内部结构和物理过程的示踪剂.

方程(5)和(8)作为计算绝热比熵的不同函数表达式, 输入相同的有效温度和重力加速度, 它们的函数值也会存在一定的差异, 而这可能会对恒星的结构和演化造成影响. 在本文中, 我们聚焦于利用Magic等<sup>[8]</sup>和Tanner等<sup>[12]</sup>的拟合结果校准 $\alpha_{\text{MLT}}$ , 研究这两种熵函数对类太阳恒星的 $\alpha_{\text{MLT}}$ 、结构和演化及锂丰度的影响. 本文结构如下: 第2节介绍计算模型的程序和输入物理, 标准太阳模型的构建和熵校准方法; 第3节给出计算结果; 第4节对结果进行讨论和总结.

## 2 程序及计算方法

### 2.1 演化程序

本文中的所有恒星演化模型都是用MESA (Modules for Experiments in Stellar Astrophysics)<sup>[23-27]</sup>演化程序计算的. 此项工作选用MESA来构建演化模型, 主要考虑它能够更灵活地设置物理参数的输入和输出, 且非常支持与Python的交互使用. 我们使用的MESA版本是2022年发布的MESA r22.11.1. 在计算中, 我们使用了OPAL (Opacity Project Livermore)物态方程表<sup>[28]</sup>以及Rogers等<sup>[29]</sup>和Ferguson等<sup>[30]</sup>的不透明度表. 这些表格是用Grevesse和Sauval<sup>[31]</sup>给出的元素混合比例制成的. 大气模型使用的是Eddington<sup>[32]</sup>灰大气. 所有模型中都考虑了元素扩散<sup>[33]</sup>.

### 2.2 标准太阳模型

标准太阳模型是建立在一些简单基本假设的基础上、能够尽可能准确地再现太阳当前观测特性的模型, 它是研究恒星物理的重要参考标准<sup>[34-36]</sup>. 太阳的年龄是4.57 Gyr, 光度是 $3.828 \times 10^{33}$  erg·s<sup>-1</sup>, 半径是 $6.957 \times 10^{10}$  cm. 利用MESA程序, 我们将4.57 Gyr<sup>[37-38]</sup>的 $1 M_{\odot}$ 模型校准到当前太阳的光度、半径和金属丰度上<sup>[31]</sup>. 初始氢丰度 $Y_i$ 、金属丰度 $Z_i$ 和 $\alpha_{\text{MLT}}$ 是自由参数, 它们由太阳的光度、金属丰度和半径决定. 初始氢丰度 $X_i$ 由 $X_i = 1 - Y_i - Z_i$ 决定. 最终我们得到标准太阳模型的参数 $\alpha_{\text{MLT}} = 2.15$ 、 $Y_i = 0.27160$ 和 $Z_i = 0.01845$ .

### 2.3 熵校准方法

在恒星演化模型中, 绝热比熵与压强、密度和平均分子量等物理量有关. 图1展示了标准太阳模型在不同演化阶段的比熵随半径的变化关系, 其中左图对应主序前早期阶段, 右图代表主序阶段. 从中可以发现在对流区中存在一个明显的绝热熵平台, 这一特征与理论预期相符. 基于Magic等<sup>[8]</sup>、Tanner等<sup>[12]</sup>和Spada等<sup>[14]</sup>的建议, 我们取该平台区的顶部的 $s_{\text{ad,mod}}$ 作为模型的绝热比熵.

$\alpha_{\text{MLT}}$ 的取值会影响模型的有效温度和表面重力加速度, 进而影响模型的熵分布. 由此可以将模

型的  $s_{\text{ad,mod}}$  与模拟的  $s_{\text{ad,sim}}$  相互匹配以校准  $\alpha_{\text{MLT}}$ <sup>[14-16]</sup>. 首先设定一个初始的  $\alpha_{\text{MLT}}$ , 我们通常选择 2.15. 它不会对校准的模型有影响, 但会影响计算速度. 利用 MESA 程序计算一个时间步长的演化模型, 演化的时间步长由 MESA 自动调节. 从得到的模型中读取有效温度、表面重力加速度、金属丰度和  $s_{\text{ad,mod}}$  的值, 然后根据数值模拟给出的熵函数计算  $s_{\text{ad,sim}}$ . 如果  $s_{\text{ad,mod}}$  与  $s_{\text{ad,sim}}$  的相对差值  $|\delta s|/s_{\text{ad,sim}}$  小于  $5 \times 10^{-5}$ , 则完成此步计算, 然后继续计算下一个步长; 反之则返回到前一步调整  $\alpha_{\text{MLT}}$  值. 我们发现  $\alpha_{\text{MLT}}$  在一定的变化范围内,  $s_{\text{ad,mod}}$  与  $s_{\text{ad,sim}}$  都随着  $\alpha_{\text{MLT}}$  单调变化, 且单调性相反, 因此选用二分法来实现这一过程. 这种熵校准方法由 Spada 等<sup>[14]</sup> 提出.

重复这些步骤, 直到  $s_{\text{ad,mod}}$  与  $s_{\text{ad,sim}}$  在每一个

时间步长都匹配, 以此构建的模型称为熵校准模型(entropy calibrated model, ECM). 利用方程(5)计算的模型记为 Magic 熵校准模型; 利用方程(8)计算的模型称为 Tanner 熵校准模型. 在主序前的全对流期,  $\alpha_{\text{MLT}}$  的大小与对流效率的关联性较弱, 为了缩短计算时间, 在此期间我们使用恒定的  $\alpha_{\text{MLT}}$  计算模型, 之后开始进行熵校准计算. 这些模型中寿命比太阳短的都演化到中心氢丰度小于  $1 \times 10^{-4}$ , 寿命比较长的则只计算到 10 Gyr. 考虑到计算机能力和所需的参数精度要求,  $\alpha_{\text{MLT}}$  的精度设置为  $1 \times 10^{-4}$ . 演化模型由 MESA 计算, 我们没有修改 MESA 程序. 模型的绝热熵  $s_{\text{ad,mod}}$  由 MESA 直接输出.  $\alpha_{\text{MLT}}$  的更新和  $s_{\text{ad,sim}}$  ( $\lg T_{\text{eff}}$ ,  $\lg g$ , Fe/H) 的计算以及比较判断则由 Python 外循环完成. 图 2 给出了实现这一计算过程的流程图.

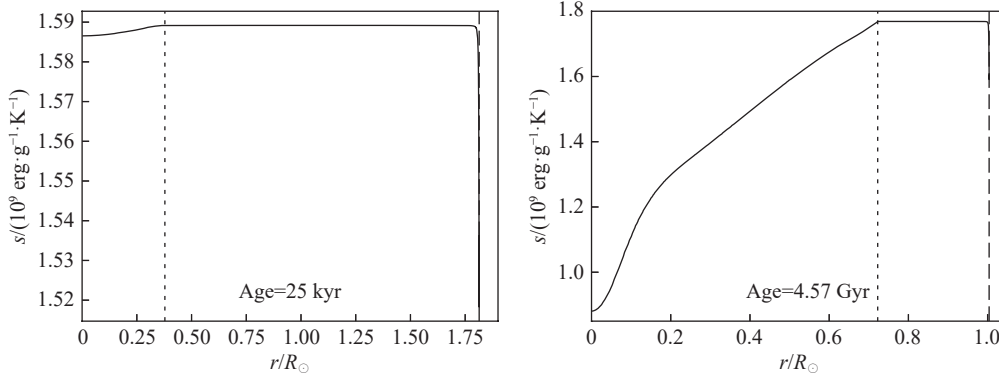


图 1 标准太阳模型在不同年龄下的比熵随半径变化. 点线表示对流区底部位置, 虚线表示对流区顶部位置.

Fig. 1 Specific entropy of standard solar model as a function of radius at different ages. The dotted line and the dashed line represent the bottom position and the top position of the convection zone.

### 3 计算结果

#### 3.1 构建熵校准模型

为了排除其他因素的影响, 我们在保持所有输入不变下计算了太阳的熵校准模型. 图 3 展示了采用 Tanner 等<sup>[12]</sup> 和 Magic 等<sup>[8]</sup> 的熵函数计算的  $1 M_{\odot}$  模型的绝热比熵  $s_{\text{ad}}$  和  $\alpha_{\text{MLT}}$  随年龄变化. 图 3(a) 显示, 在主序阶段, 当年龄小于 2 Gyr 时, Magic 熵校准模型的绝热熵更接近于标准模型; 而当年龄大于 2 Gyr 时, Tanner 熵校准模型则展现出更好

的吻合度. 这反映了在不同参数空间下, 二者存在差异. 模型的熵轮廓是表面重力加速度、有效温度和化学成分的唯一函数<sup>[12]</sup>. 质量和化学成分给定时,  $\alpha_{\text{MLT}}$  是决定模型半径和重力加速度的主要因素, 因此, 熵的演化决定了  $\alpha_{\text{MLT}}$  的变化. 对比图 3 的(a)和(b), 可以发现在主序前阶段大约 8 Myr 时, 绝热比熵达到极小值而  $\alpha_{\text{MLT}}$  达到极大值, 并且基于 Tanner 和 Magic 的熵函数计算出的绝热比熵在极值附近差异显著. 在极值附近, Tanner 模型的熵表现出比 Magic 模型的熵更大的变化率, 这直接导

致 $\alpha_{\text{MLT}}$ 的演化曲线出现一个更陡峭的波峰结构. 这一重要特征与Spada等<sup>[14]</sup>的结果一致.

图4给出了分别利用Tanner等<sup>[12]</sup>和Magic等<sup>[8]</sup>的熵函数计算的 $1 M_{\odot}$ 的熵校准模型在主序阶段半径随年龄的变化. 从图中可以看出, 直接匹配模型的 $s_{\text{ad,mod}}$ 与模拟的 $s_{\text{ad,sim}}$ , 在4.57 Gyr时, 熵校准模型的半径小于标准太阳模型的.

太阳模型必须满足太阳半径的限制. Spada等<sup>[14]</sup>在利用Tanner等<sup>[12]</sup>给出的熵函数构建太阳模型时, 提出应该增加一个熵的补偿值 $s_{\text{offset}}$ 使半径满足观测约束. Spada等<sup>[14]</sup>引入的补偿值大约是太阳绝热比熵的1.0%. 我们计算发现, 对于Tanner等人的熵函数, 这个补偿值大约是太阳绝热比熵的0.9% (即 $1.57 \times 10^7 \text{ erg} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ), 和Spada等人的结果仅有大约0.1%的差异, 所以我们的计算结果和Spada等人的基本一致. 对于Magic等人的熵函数, 这个补偿值大约是1.5% (即 $2.63 \times 10^7$

$\text{erg} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ). 在之后的熵校准模型计算中, 我们都考虑了这两个补偿值.

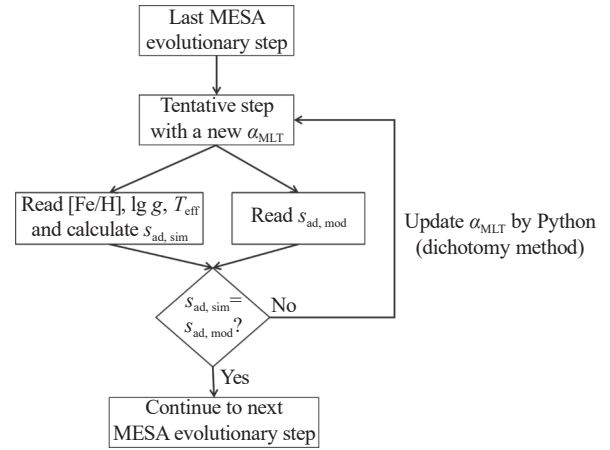


图 2 熵校准过程中每一个时间步长调整 $\alpha_{\text{MLT}}$ 的循环示意图

Fig. 2 Schematic of the  $\alpha_{\text{MLT}}$  calibration loop included at each evolutionary step of our evolutionary calculations

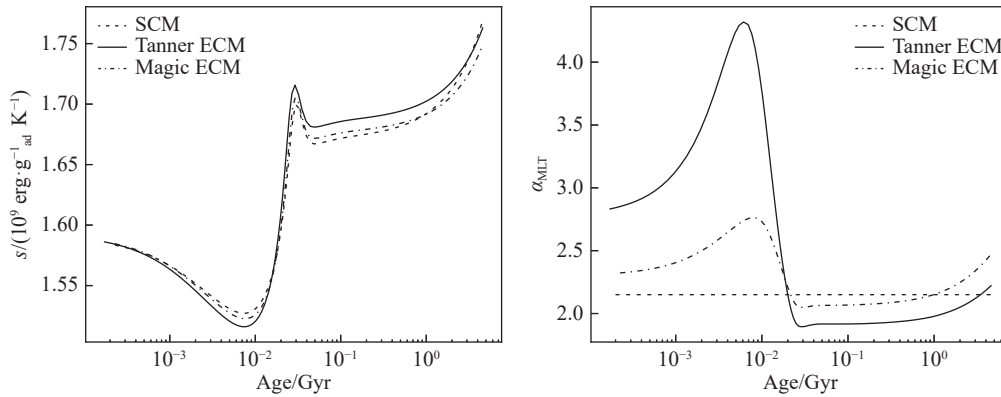


图 3  $1 M_{\odot}$ 模型的绝热比熵 $s_{\text{ad}}$ 和 $\alpha_{\text{MLT}}$ 随年龄的变化. 点线、点虚线和实线分别表示标准太阳模型、用Magic等<sup>[8]</sup>和Tanner等<sup>[12]</sup>给出的熵函数计算的熵校准模型的绝热比熵和 $\alpha_{\text{MLT}}$ 随年龄的变化.

Fig. 3 Adiabatic specific entropy  $s_{\text{ad}}$  and  $\alpha_{\text{MLT}}$  of  $1 M_{\odot}$  models as a function of age. The dotted line represents the standard solar model. The dot-dashed line and solid line represent the ECMs calculated using the entropy functions given by Magic et al.<sup>[8]</sup> and Tanner et al.<sup>[12]</sup>, respectively.

给定质量和年龄的恒星, 它的光度主要由初始金属丰度和氦丰度决定, 半径主要由混合长参数 $\alpha_{\text{MLT}}$ 决定. 我们和Spada等<sup>[14]</sup>的计算都表明, 熵校准主要影响半径及对流区底部位置, 对光度的影响相对可以忽略. 在考虑补偿值后, 熵校准模型就能重现太阳的光度和半径.

### 3.2 熵校准 $\alpha_{\text{MLT}}$ 对恒星演化和基本参数的影响

图5给出了太阳校准模型和两种熵校准模型的赫罗图, 系统揭示了熵校准 $\alpha_{\text{MLT}}$ 对恒星演化轨迹产生的影响. 在主序前阶段, Tanner的熵校准模型有效温度更高, 而Magic的熵校准模型有效温度较低. 在主序阶段早期, 熵校准模型的有效温度都低

于太阳校准模型的,而在主序的中后期,熵校准模型的有效温度都高于太阳校准模型的.这表明利用恒定的 $\alpha_{\text{MLT}}$ 计算恒星演化模型,在主序早期可能会高估有效温度,而在主序中后期则相反.

图6显示熵校准 $\alpha_{\text{MLT}}$ 对模型的半径有明显影响.在主序前阶段, Tanner熵函数和Magic熵函数对半径的影响几乎相反, Tanner熵函数校准的模型半径小于太阳校准模型,而Magic熵函数校准的模型半径则大于太阳校准模型.在主序阶段,它们对半径影响的趋势相同,即主序早期,熵校准模型的半径大于太阳校准模型的半径,但在主序中后期则相反,这与Spada等<sup>[14]</sup>根据Tanner熵函数构建的太阳模型一致.说明传统的恒星演化模型可能会低估年轻恒星的半径,使得观测和理论之间存在偏差.

为了进一步分析熵校准模型的赫罗图和半径变化的原因,我们在图7中给出了熵校准的 $\alpha_{\text{MLT}}$ 和太阳定标的 $\alpha_{\text{MLT}}$ 随年龄的演化.图7显示在主序前阶段, Tanner的熵校准 $\alpha_{\text{MLT}}$ 大于太阳校准模型,而Magic的熵校准 $\alpha_{\text{MLT}}$ 则小于太阳校准模型.在主序早期,熵校准模型的 $\alpha_{\text{MLT}}$ 都小于太阳校准模型的 $\alpha_{\text{MLT}}$ ,而在主序晚期则大于太阳校准模型的.一般情况下,  $\alpha_{\text{MLT}}$ 越大, 恒星模型的半径越小. 因此,

正是 $\alpha_{\text{MLT}}$ 的这种变化,导致了演化模型的有效温度和半径的变化.我们利用Tanner熵函数计算的结果和Spada等<sup>[14]</sup>的结果是一致的,但是Magic熵校准模型的演化与Tanner熵校准模型的演化是存在差别的.

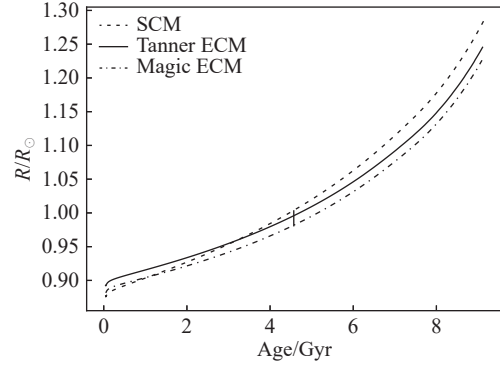


图 4  $1 M_{\odot}$  模型的半径随年龄的变化. 点线表示标准太阳模型的半径, 点虚线和实线分别表示用Magic等<sup>[8]</sup>和Tanner等<sup>[12]</sup>给出的熵函数计算的熵校准模型的半径. 太阳的年龄是4.57 Gyr.

Fig. 4 Radii of  $1 M_{\odot}$  models as a function of age. The dotted line represents the standard solar model. The dot-dashed line and solid line represent the ECMs calculated using the entropy functions given by Magic et al.<sup>[8]</sup> and Tanner et al.<sup>[12]</sup>, respectively. The age of the Sun is 4.57 Gyr.

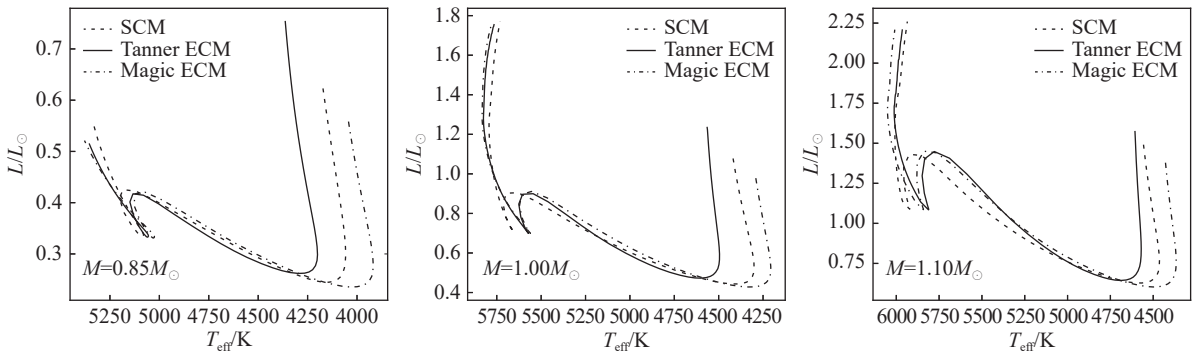


图 5 不同质量恒星的赫罗图. 点线表示太阳校准模型. 实线表示用Tanner熵函数计算的熵校准模型. 点虚线代表用Magic熵函数计算的熵校准模型.

Fig. 5 Hertzsprung-Russell diagrams of stars with different masses. The dotted line represents SCM. The solid line shows the ECM calculated using Tanner's entropy function, while the dot-dashed line presents the ECM computed using Magic's entropy function.

### 3.3 进一步利用锂元素揭示Magic和Tanner的熵校准模型

恒星锂元素的耗散可以用来揭示恒星内部结

构和物理过程<sup>[22]</sup>. 我们对比发现, Magic和Tanner的熵校准模型在主序前阶段存在显著差异. 为了揭示哪一个能更真实地反映演化规律, 我们计算

了这些模型的锂丰度演化, 结果如图8所示. 图中显示, 在主序前阶段熵校准模型对锂的耗散影响非常明显. 对于 $1 M_{\odot}$ 模型, 在零龄主序时, 标准模型的锂丰度大约是2.0 dex (初始值的约1/20), Tanner的熵校准模型给出的锂丰度是0.89 dex, 而Magic的熵校准模型给出的是2.5 dex. 观测给出太阳现在的锂元素丰度是 $(1.04 \pm 0.10)$  dex<sup>[19]</sup>. 这说明Tanner

熵校准模型在主序前阶段的结构发生了明显改变, 导致锂元素在主序前被大量消耗. 这与观测到的类太阳恒星的锂丰度演化<sup>[39]</sup>和理论预言的锂分布都不一致. 观测和理论都认为太阳孪生星的锂耗散在主序阶段仍然存在. 这反映了Tanner的熵函数不适用于主序前阶段.

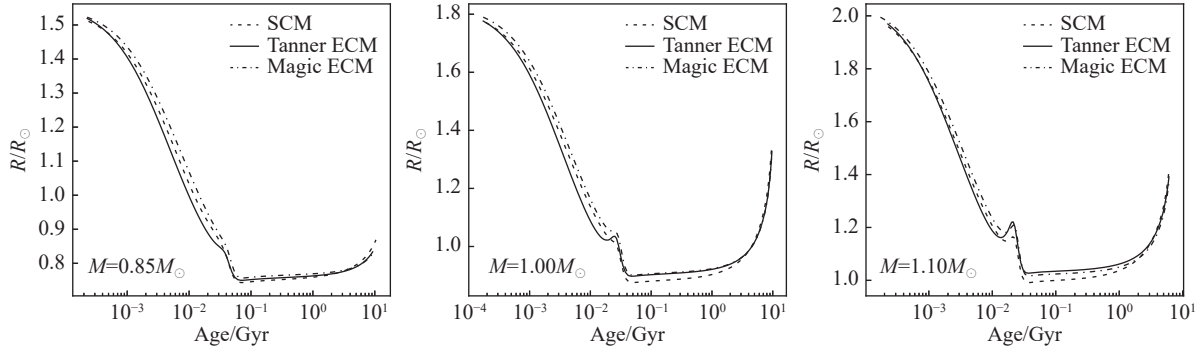


图 6 不同模型半径随年龄的变化. 左、中、右子图分别对应质量为 $0.85$ 、 $1.00$ 、 $1.10 M_{\odot}$ 的模型.  $1 M_{\odot}$ 模型的零龄主序年龄大约是40 Myr.

Fig. 6 Radii of different models as a function of age. The left, middle, and right panels correspond to models with masses  $0.85$ ,  $1.00$ , and  $1.10 M_{\odot}$ , respectively. The age of  $1 M_{\odot}$  models at zero-age main-sequence is about 40 Myr.

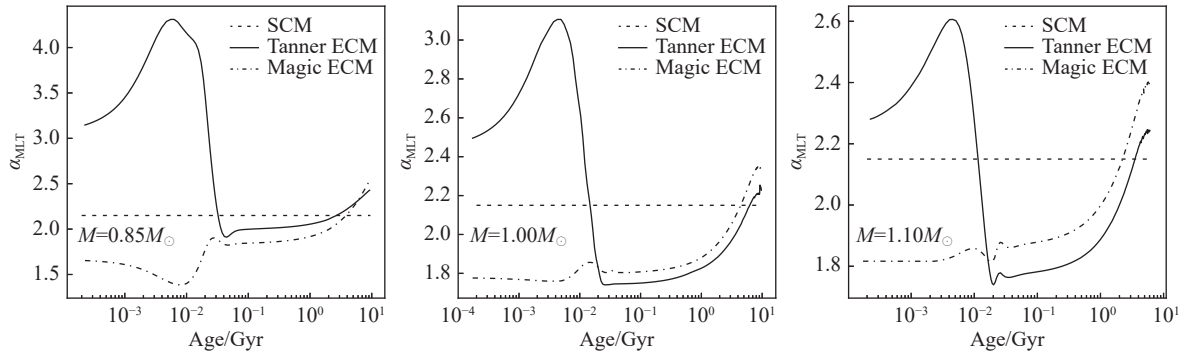


图 7 混合长参数 $\alpha_{\text{MLT}}$ 随年龄的变化. 左、中、右子图分别对应质量为 $0.85$ 、 $1.00$ 、 $1.10 M_{\odot}$ 的模型.

Fig. 7 Mixing length parameter  $\alpha_{\text{MLT}}$  of models with different masses as a function of age. The left, middle, and right panels correspond to models with masses  $0.85$ ,  $1.00$ , and  $1.10 M_{\odot}$ , respectively.

图9描述了太阳校准模型和熵校准模型的对流区底部位置 $r_{\text{BC}}$ 和温度 $T_{\text{BC}}$ 随年龄的演化. 此图清楚地表明在主序前阶段, Tanner的熵校准模型的对流区位置比太阳校准模型更深、温度更高, Magic的则相反. 在主序早期阶段, 熵校准模型的

对流区底部位置更浅, 温度也更低. 锂的燃烧速率大约正比于温度的20次方. Tanner熵校准模型在零龄主序时锂丰度过低, 是由主序前阶段对流区底部温度过高引起的. 这表明Tanner熵校准模型给出的 $\alpha_{\text{MLT}}$ 在主序前阶段过大, 导致恒星过度收

缩, 对流区底部温度过高. 因此, Tanner的熵函数 公式可能不适用于主序前阶段.

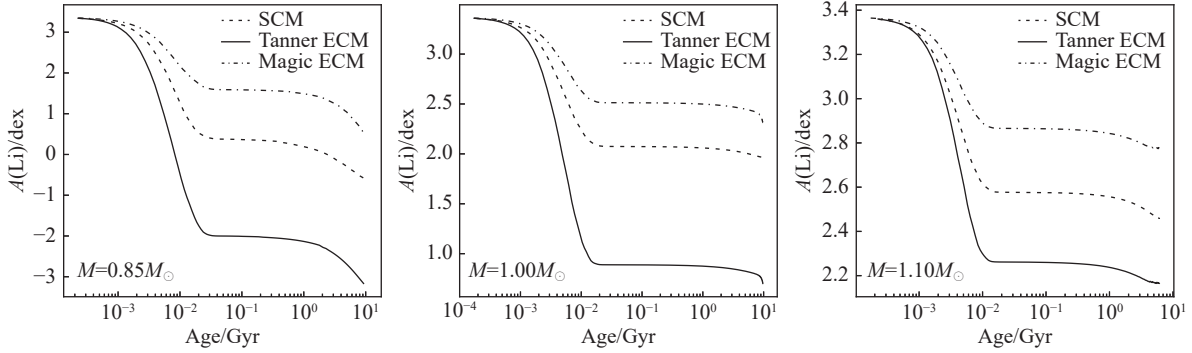


图 8 锂丰度随年龄的变化. 左、中、右子图分别对应质量为0.85、1.00、1.10  $M_{\odot}$  的模型.

Fig. 8 Lithium abundances of models with different masses as a function of age. The left, middle, and right panels correspond to models with masses 0.85, 1.00, and 1.10  $M_{\odot}$ , respectively.

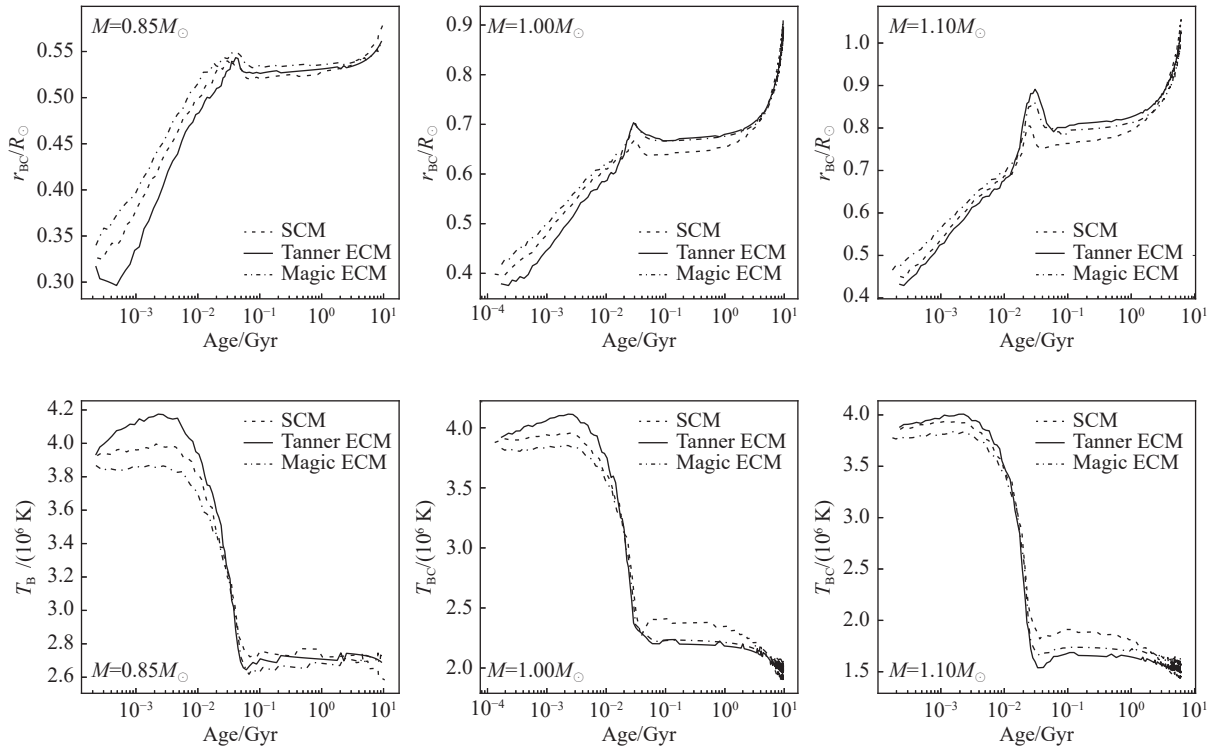


图 9 上图: 不同质量恒星模型的对流区底部半径随年龄变化的函数曲线. 下图: 不同质量恒星模型的对流区底部温度随年龄变化的函数曲线.

Fig. 9 Top panels: radius of base of the convective zone for models with different masses as a function of age. Bottom panels: temperature of base of the convective zone for models with different masses as a function of age.

## 4 讨论和总结

熵校准模型在每一个时间步长都需要调整  $\alpha_{\text{MLT}}$ , 这导致计算量远大于  $\alpha_{\text{MLT}}$  恒定的太阳校准模型. 因此, 我们的模型只演化到主序终止年龄或主序晚期. 这种方法能反映出标准恒星演化模型的问题和局限性, 但不适合大样本的理论计算. 进一步简化熵校准  $\alpha_{\text{MLT}}$  与恒星参数之间的依赖关系, 将有助于提升熵校准方法在恒星物理研究中的普适性.

Spada等<sup>[14-15]</sup>使用 YREC (Yale Stellar Evolution Code) 计算演化模型. 他们仅计算了利用 Tanner 的熵函数校准模型的情况. 在采用 Eddington 大气模型下, 他们得出熵校准模型能得到太阳模型和  $\alpha$  Cen A 和 B 模型. Manchon等<sup>[17]</sup>使用 Cesam2k20 演化程序和 Eddington 大气模型, 利用熵校准方法也计算了  $\alpha$  Cen A 和 B 模型, 他们得出熵校准方法能整合到他们的程序中的结论. 在 Eddington 大气模型下, 我们把熵校准方法整合到 MESA 演化模型计算中, 我们比较了 Tanner 的熵与 Magic 的熵校准模型的差异, 发现二者在主序前存在明显差异. 我们利用锂元素对温度的敏感性来检验这两种熵校准模型的可靠性, 发现 Tanner 熵函数可能不适用于主序前阶段. 我们的熵校准模型在主序前阶段演化基本和 Manchon等<sup>[17]</sup>的一致, 即 Manchon等<sup>[17]</sup>的 Tanner 熵校准模型在主序前的有效温度也明显比 Magic 熵校准模型的高, 但是他们没有计算锂丰度演化, 因此没有发现这可能导致锂丰度过低的现象.

在零龄主序附近, 我们计算的太阳标准模型的锂丰度大约是 2.0 dex. Spada等<sup>[14]</sup>的则约为初始值的 1/4. 这可能是程序差异造成的, 比如不同程序所用的核反应率可能存在差异、模型对流区边界的划分方式不同、对流区底部温度存在差异等. 但是, 我们的太阳标准模型和熵校准模型之间的锂丰度差异, 则完全由对流区底部位置不同造成温度差异引起. 温度越高燃烧率越高, 锂丰度越低, 这种变化是指数形式的. Magic 熵校准模型的锂丰度与 Tanner 的锂丰度相差大约 1.6 dex. 原因一方面是 Tanner 熵校准模型对流区底部温度比

Magic 熵校准模型的高, 锂的核反应率也就更高; 另一方面, Tanner 熵校准模型对流区底部位置更深, 这导致 Tanner 熵校准模型的锂燃烧区域也更大. 核反应率更高, 燃烧区域更大, 二者的共同作用使得 Tanner 熵校准模型的锂元素被迅速消耗.

Spada等<sup>[14]</sup>的研究发现, 把 3D 数值模拟结果应用到 1D 恒星演化研究中需要一个熵的补偿值, 这个补偿值是由太阳模型得出的. 我们的计算结果也表明这个补偿值是必要的. 除太阳外,  $\alpha$  Cen A 和 B 是观测最丰富的两颗类太阳恒星. Spada等<sup>[15]</sup>使用与太阳模型相同的补偿值可以基本重现  $\alpha$  Cen A 和 B 的光度、半径和金属丰度. 对于 Magic 的熵函数, 我们使用的补偿值是  $2.63 \times 10^7 \text{ erg} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Manchon等<sup>[17]</sup>在使用 Magic 的熵函数计算  $\alpha$  Cen A 和 B 的模型时, 所使用的补偿值是  $2.64 \times 10^7 \text{ erg} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , 并且他们还证明这个补偿值在整个演化过程中是常数. 这说明从太阳模型或  $\alpha$  Cen A 和 B 的模型得到的补偿值是基本相同的. 这意味着该补偿值在类太阳主序恒星中很可能是通用的, 但它是否完全适用于其他所有恒星, 还需要更多的模型计算来验证.

Magic 和 Tanner 的熵校准模型之间的差异完全是由两者熵的差异造成的. 一般认为绝热比熵可以表示成恒星基本参数的连续函数, 但是函数的解析式难以通过物理或数学计算给出, 只能通过复杂的 3D RHD 模拟计算去拟合, 而不同的参数设置和拟合方法都会带来差异. 这种差异可能的来源比较多: 一是 3D 数值模拟的网格参数有差异, 包括有效温度等物理量所设置的步长不同、拟合点的样本数量不同、参数空间的范围不同; 二是 Magic 等人和 Tanner 等人在做数值模拟时输入物理不同, 包括使用不同的程序、不同的辐射转移方程、不同的大气模型<sup>[12]</sup>; 三是拟合公式的选择不同, Magic 等人选用二次函数和指数函数复合, 而 Tanner 等人选用一次函数和指数函数复合. 即使将 Magic 熵函数中的  $[\text{Fe}/\text{H}]$  取为 0, 其对于表面重力加速度和有效温度的敏感性依然强于 Tanner 熵函数. 对于  $1 M_{\odot}$  的模型来说, 我们的计算反映出 Magic 熵函数对演化早期的模型拟合更好, 而 Tanner 的熵函数对年龄大于 2 Gyr 的模型拟合更

好. 这说明如果要把熵校准方法更好地应用于恒星演化, 解决更多问题, 还需要更多更密的网格模拟计算.

绝热比熵是有效温度、表面重力加速度和金属丰度的函数<sup>[12]</sup>. 在标准模型( $\alpha_{\text{MLT}}$ 固定)中, 对于给定质量、化学成分和年龄的模型, 混合长参数是决定有效温度和重力加速度的主要参数. Tanner等<sup>[9]</sup>证明不同大气模型虽然会影响太阳模型定标的 $\alpha_{\text{MLT}}$ , 但 $\alpha_{\text{MLT}}$ 与有效温度、重力加速度和金属丰度之间的关系仍然成立. Spada等<sup>[14]</sup>认为大气模型会影响超绝热层的结构, 但对绝热比熵几乎没有影响. Manchon等<sup>[17]</sup>进一步证明利用Eddington大气模型或是其他几种常见的大气模型几乎不会影响熵校准模型的光度、半径和有效温度(相对变化在 $10^{-2} - 10^{-5}$ ), 因为熵校准模型中 $\alpha_{\text{MLT}}$ 不再恒定, 它始终被调节到相应的有效温度和重力加速度上.

太阳的Magic熵校准模型在4.57 Gyr时的锂丰度高于太阳的观测值(见图8), 这是因为在演化模型中我们没有考虑对流超射和恒星转动效应. 现在的理论认为太阳的锂丰度耗散在主序阶段主要由转动混合造成<sup>[22]</sup>.

我们利用Tanner熵函数和Magic熵函数计算了熵校准对恒星演化、结构参数和混合长参数的影响. 基于熵校准得到的 $\alpha_{\text{MLT}}$ 随恒星质量和年龄改变, 这与传统研究中采用固定 $\alpha_{\text{MLT}}$ 的方法是不一样的. 我们的计算结果显示, 传统的恒星演化模型可能高估了年轻恒星的有效温度, 同时低估了它们的半径, 而年老恒星则相反. 这表明标准恒星演化程序预测的小质量年轻恒星的半径可能小于观测值, 这值得深入研究. 此外, 我们的演化模型还显示Tanner的熵函数高估了主序前阶段的 $\alpha_{\text{MLT}}$ , 使得恒星过度收缩, 导致太阳孪生星的锂被过度消耗, 与观测不一致. 尽管Tanner的熵函数更多地被人们用于恒星演化研究, 但它不适用于主序前阶段, 并且它还忽略了重元素沉淀造成的元素丰度变化. Magic的熵函数虽然更复杂, 但它比Tanner的熵函数更适用于恒星演化研究.

**致谢** 作者感谢审稿人提出了一些有益的建议.

## 参 考 文 献

- [1] Böhm-Vitense E. ZAP, 1958, 46: 108
- [2] Bonaca A, Tanner J D, Basu S, et al. ApJL, 2012, 755: 12
- [3] Lebreton Y, Fernandes J, Lejeune T. A&A, 2001, 374: 540
- [4] Yıldız M, Yakut K, Bakış H, et al. MNRAS, 2006, 368: 1941
- [5] Viani L S, Basu S, Ong J M J, et al. ApJ, 2018, 858: 28
- [6] Henyey L G, Lelevier R, Levee R D. ApJ, 1959, 129: 2
- [7] Ludwig H G, Freytag B, Steffen M. A&A, 1999, 346: 111
- [8] Magic Z, Collet R, Asplund M, et al. A&A, 2013, 557: A26
- [9] Tanner J D, Basu S, Demarque P. ApJL, 2014, 785: 13
- [10] Trampedach R, Asplund M, Collet R, et al. ApJ, 2013, 769: 18
- [11] Stahler S W. PASP, 1988, 100: 1474
- [12] Tanner J D, Basu S, Demarque P. ApJL, 2016, 822: 17
- [13] Ireland L G, Browning M K. ApJ, 2018, 856: 132
- [14] Spada F, Demarque P, Basu S, et al. ApJ, 2018, 869: 135
- [15] Spada F, Demarque P. MNRAS, 2019, 489: 4712
- [16] Spada F, Demarque P, Kupka F. MNRAS, 2021, 504: 3128
- [17] Manchon L, Deal M, Goupil M J, et al. A&A, 2024, 687: A146
- [18] Song N, Alexeeva S, Zhao G. RAA, 2020, 20: 121
- [19] Lodders K. SSRv, 2021, 217: 44
- [20] 李远超, 邢丽峰. 天文学报, 2021, 62: 51
- [21] 闫宏亮, 施建荣. 天文学报, 2022, 63: 16
- [22] Yang W, Yuan H, Wu Y, et al. ApJ, 2025, 982: 3
- [23] Paxton B, Bildsten L, Dotter A, et al. ApJS, 2011, 192: 3
- [24] Paxton B, Cantiello M, Arras P, et al. ApJS, 2013, 208: 4
- [25] Paxton B, Marchant P, Schwab J, et al. ApJS, 2015, 220: 15
- [26] Paxton B, Schwab J, Bauer E B, et al. ApJS, 2018, 234: 34
- [27] Paxton B, Smolec R, Schwab J, et al. ApJS, 2019, 243: 10
- [28] Rogers F J, Nayfonov A. ApJ, 2002, 576: 1064
- [29] Rogers F J, Swenson F J, Iglesias C A. ApJ, 1996, 456: 902
- [30] Ferguson J W, Alexander D R, Allard F, et al. ApJ, 2005, 623: 585
- [31] Grevesse N, Sauval A J. SSRv, 1998, 85: 161
- [32] Eddington A S. MNRAS, 1916, 77: 16
- [33] Thoul A A, Bahcall J N, Loeb A. ApJ, 1994, 421: 828
- [34] Bahcall J N, Pinsonneault M H, Basu S. ApJ, 2001,

- 555: 990
- [35] Bahcall J N, Pinsonneault M H. *RvMP*, 1992, 885: 926
- [36] Yang W, Tian Z. *ApJ*, 2024, 970: 38
- [37] Patterson C. *GCA*, 1956, 10: 230
- [38] Baker J, Bizzarro M, Wittig N, et al. *Nature*, 2005, 436: 1127
- [39] Carlos M, Meléndez J, Spina L. *MNRAS*, 2019, 485: 4052

## The Effects of Entropy-calibration Mixing Length Parameter on Structure, Evolution, and Lithium Abundance of Stars

LI Zheng-yang    YANG Wu-ming    LIU Zhong-yang

(*School of Physics and Astronomy, Beijing Normal University, Beijing 100875*)

**ABSTRACT** In traditional stellar evolution studies, the mixing-length parameter  $\alpha_{\text{MLT}}$  is usually set as a fixed value. However, many studies have found that  $\alpha_{\text{MLT}}$  should not be constant. The mixing-length parameter  $\alpha_{\text{MLT}}$  can affect the adiabatic entropy of models, and the three-dimensional radiative hydrodynamic simulations can provide the value of adiabatic entropy. Therefore, the simulated adiabatic entropy can be used to calibrate  $\alpha_{\text{MLT}}$ . Using two simulated entropy-calibrated models, the variation of  $\alpha_{\text{MLT}}$  with stellar mass and age is investigated. Compared to the standard model, the entropy-calibrated model exhibits a larger radius and lower effective temperature in the early main sequence, whereas the opposite is true in the late main sequence. Consequently, the evolutionary tracks of the entropy-calibrated model differ significantly from those of the standard model. The computational results further reveal that one of the entropy functions is not applicable to the pre-main sequence phase, as it leads to excessive depletion of lithium that is inconsistent with observational data. In contrast, although the other entropy function is more complex, it is applicable to the pre-main sequence phase.

**Key words** stars: evolution, stars: fundamental parameters, stars: interiors, stars: low-mass

ChinaXiv:202604.00178v1